量子场论习题 6
时序乘积的洛伦兹对称性

王誉晨

更新：2023 年 5 月 28 日

前言

在相互作用绘景下，时间演化算符 $\mathrm{U}(t_0,t)$ 涉及形如 $\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2...$ 的积分上下限相互依赖的多重积分，难以计算。于是我们引入时序乘积 T，无脑地将积分上限推至 t. 这样做的后果是多计算了一些积分，不过根据几何体积分区域的对称性，多计算的部分不过是最初的部分部分调整了积分顺序而已，最终我们总共计算了 n! 个，n 是积分的个数，某种程度上也是积分几何体的维度. 若 $\mathrm{n}=3$ 即立方体可以分成 6 个具有手性的体积相同的三棱推[1].

时序乘积定义为: 将场算符根据其时空点坐标零分量降序排列。这时会出现一个问题, 类时和类光的间隔具有确定的时间顺序, 而类空间隔只满足 Lorentz 协变，这意味着在不同参考系下两个场算符可能具有不同时序，我们需要证明的就是在这种情况下时序乘积算符依然是 well define。

怎么证? 目标就是要证明：时序乘积的操作在类空间隔中，不依赖于 x_0,y_0 的大小关系. 换句话说就是，对于类空间隔而言 Lorentz 变换可能改变 x_0,y_0 的大小关系，在时序乘积的作用下会使得场算符交换顺序，所以需要证明以是 $\phi(x)\phi(y)=\pm\phi(x)\phi(y)$，也就是说换了等于没换，$\pm$ 号取决于正反对易关系

课本已经对于标量场和旋量场作了详细说明，本习题讨论有质量矢量场的情况

习题 0.1 根据有质量实矢量场的平面波展开式，证明：

$$[A^\mu(x),A^\nu(y)]=0,\quad (x-y)^2<0$$

[1]这个 fancy 的结论来自和余荫铠在丰盛堂 B101 讨论得到

证明.

有质量矢量场平面波展开式：

$$A^{\mu}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{\lambda=\pm,0}[\varepsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda)a_{p,\lambda}e^{-ipx}+\varepsilon^{\mu*}(\vec{p},\lambda)a^{\dagger}_{p,\lambda}e^{ipx}]$$

$$A^{\nu}(y)=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_q}}\sum_{\lambda'=\pm,0}[\varepsilon^{\nu}(\vec{q},\lambda')a_{q,\lambda'}e^{-iqy}+\varepsilon^{\nu*}(\vec{q},\lambda')a^{\dagger}_{q,\lambda'}e^{iqy}]$$

对易子计算关系： $[A+B,C+D]=[A,C]+[B,C]+[A,D]+[B,D]$

因为有产生湮灭算符对易关系：

$$[a_{p,\lambda},a^{\dagger}_{q,\lambda'}]=(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(p-q)$$

$$[a_{p,\lambda},a_{q,\lambda'}]=[a^{\dagger}_{p,\lambda},a^{\dagger}_{q,\lambda'}]=0$$

$$\begin{aligned}
[A^{\mu}(x),A^{\nu}(y)]&=\int\frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_pE_q}}\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'}\Big(\varepsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\vec{q},\lambda')[a_{p,\lambda},a^{\dagger}_{q,\lambda'}]e^{-i(px-qy)}\\
&\qquad+\varepsilon^{\mu*}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\vec{q},\lambda')[a^{\dagger}_{p,\lambda},a_{q,\lambda'}]e^{i(px-qy)}\Big)\\
&=\int\frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_pE_q}}\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'}\Big(\varepsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\vec{q},\lambda')[a_{p,\lambda},a^{\dagger}_{q,\lambda'}]e^{-i(px-qy)}\\
&\qquad-\varepsilon^{\mu*}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\vec{q},\lambda')[a_{q,\lambda'},a^{\dagger}_{p,\lambda}]e^{i(px-qy)}\Big)\\
&=\int\frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6\sqrt{4E_pE_q}}\sum_{\lambda}\sum_{\lambda'}(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(p-q)\Big(\varepsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\vec{q},\lambda')e^{-i(px-qy)}\\
&\qquad-\varepsilon^{\mu*}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\vec{q},\lambda')e^{i(px-qy)}\Big)\\
&=\int\frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^3\sqrt{4E_pE_q}}\sum_{\lambda}\delta^{(3)}(p-q)\Big(\varepsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\vec{q},\lambda)e^{-i(px-qy)}\\
&\qquad-\varepsilon^{\mu*}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\vec{q},\lambda)e^{i(px-qy)}\Big)\\
&=\int\frac{dp^3}{(2\pi)^3 2E_p}\sum_{\lambda}\Big(\varepsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu*}(\vec{p},\lambda)e^{-ip(x-y)}\\
&\qquad-\varepsilon^{\mu*}(\vec{p},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\vec{p},\lambda)e^{ip(x-y)}\Big)
\end{aligned}$$

又因为极化求和关系

$$\sum_{\lambda=\pm,0}\varepsilon^{*}_{\mu}(p,\lambda)\varepsilon_{\nu}(p,\lambda)=-g_{\mu\nu}+\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2}$$

$$=\int\frac{dp^3}{(2\pi)^3 2E_p}\Big(\Big(-g_{\nu\mu}+\frac{p_{\nu}p_{\mu}}{m^2}\Big)e^{-ip(x-y)}-\Big(-g_{\mu\nu}+\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2}\Big)e^{ip(x-y)}\Big)$$

因为度规张量是对称的 $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$

$$=\int\frac{dp^3}{(2\pi)^3 2E_p}\Big(-g_{\mu\nu}+\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2}\Big)\Big(e^{-ip(x-y)}-e^{ip(x-y)}\Big)$$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$=\int\frac{dp^3}{(2\pi)^3 2E_p}\Big(-g_{\mu\nu}+\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2}\Big)(-2)i\sin(p(x-y))$$

对于 $(x-y)^2<0$ 的类空间隔来说 我们总可以通过 lorenz 变化使得 $x_0-y_0=0$

$$=\int\frac{dp^3}{(2\pi)^3 2E_p}\Big(-g_{\mu\nu}+\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2}\Big)(-2)i\sin(\vec{p}\,(\vec{x}-\vec{y}))$$

$$=0$$

注：奇函数全空间积分为0

得证.

参考文献

[1] Zhaohuan Yu. “Quantum Field Theory Lecture Notes”. Unpublished. Apr. 2023. URL: https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html.