四减二等于二

——矢量场量子化中的规范冗余度

王誉晨†

中山大学 物理学院，广州，510275

摘　要

在本研究中，首先我们从 A-B 效应出发探讨广为人知的规范冗余度问题，接着我们介绍了经典电动力学中的规范去除方法，物理之美就在于，这种规范去除的思想可以引导我们解决无质量矢量场量子化过程中的两个问题，最终，无论经典还是量子，**“可直接观测的物理量不随规范改变而改变”** 的真理颠扑不破

关键词： 规范冗余度，矢量场，量子化，Gupta-Bleuler 条件

† 通讯作者：wangyuchen256@mail2.sysu.edu.cn

1　从 A-B 效应讲起

在经典电动力学中，场的基本物理量是 E 和 B, 而在量子力学中矢势 A 和标势 φ 的地位将大大提升, 其中最著名的现象是 A-B 效应 [4].

在电子双缝衍射的实验中，屏幕上会出现明暗相间的干涉条纹, A-B 效应描述的是: 当我们在双缝隙后面放置一个细长的螺线管 (这里其实是为了模拟无限长的螺线管，螺线管无漏磁)，小心排除螺线管外部的磁场，使得电子通过的空间 $B=0$，神奇的现象发生了, 当我们调控螺线管中的磁通量的时候, 我们发现屏幕上的干涉条纹也会发生相应的改变。

最终的结论是，仅仅用 B 来描述磁场，并不能完全描述，少了；而使用 A 来描述，由于 A 具有规范冗余度，A 并不能直接观测，多了；可以完全恰当描述的是相因子：

$$\exp(i\frac{e}{\hbar}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{l}) \tag{1}$$

所以为了获得可以恰当描述可观测的物理量，我们需要想办法将矢势 A 中多的部分杀掉，即 **“通过选定规范减少规范冗余度，从而与自由度设配”，成为直接可观测量**

2　经典电动力学的规范固定

经典电动力学中，有源麦克斯韦方程组如下：

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{3}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{5}$$

其中，$\mathbf{E}$ 表示电场，$\mathbf{B}$ 表示磁场，ρ 表示电荷密度，$\mathbf{J}$ 表示电流密度，ϵ_0 表示真空中的电介质常数，μ_0 表示真空中的磁导率，t 表示时间。

我们知道, 矢势 A 和标势 φ 描述电磁场

并不是唯一的，当我们作规范变换时：

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{6}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \tag{7}$$

我们发现电磁场的磁场强度 $\mathbf{B}$ 和电场强度 $\mathbf{E}$，它们在规范变换下是不变的：

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{8}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \tag{9}$$

我们知道客观规律应该规范的选取无关，所以我们需要选取规范条件减少冗余度，常见的规范条件如下：

洛伦兹规范条件：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{11}$$

库伦规范条件：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{12}$$

出于运算方便，以及对于物理方程对称美的追求，之后我们选定洛伦兹规范，电磁场的矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 φ 满足如下方程，即达朗贝尔方程：

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{13}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{14}$$

其中，$\mathbf{J}$ 是电流密度，ρ 是电荷密度，c 是光速，μ_0 和 ε_0 分别是真空中的磁导率和介电常数。

3 无质量量子矢量场的规范固定

3.1 麦克斯韦理论的四维形式

在这里，我们不加证明的给出麦克斯韦理论的四维形式，证明过程见 [4]，在这里我们使用的符号约定均参考 [2]

四维矢势：

$$A_\mu = (\frac{i}{c}\varphi, \mathbf{A}) \tag{15}$$

电磁场张量：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{16}$$

电磁场张量满足 Bianchi 恒等式：

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{17}$$

麦克斯韦方程可以等价表述为电磁场张量的运动方程：

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{18}$$

自由无质量的矢量的拉氏量：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{19}$$

3.2 拉格朗日量的两个问题

通过观察上面拉格朗日量的表达，我们发现了两个问题：

- $\mathcal{L}$ 不包含 $\partial_0 A_0$ 项，A_0 不是动力学的，只要确定了 $\mathbf{A}$ 分布，就可以完全确定 A_0，读者可以通过 $F_{00} = 0, F_{0i} \neq 0$ 简单证明。
- $\mathcal{L}$ 具有规范冗余度：我们 $\mathcal{L}$ 进行规范变换得：

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu} \tag{20}$$

这里的规范冗余度与经典情况下不同，仅仅使用 Lorenz 规范并不能完全消除冗余度问题：

若 A 满足 Lorenz 规范，则 $\partial_\mu A^\mu = 0$。考虑一个规范变换 $A'_\mu = A_\mu + i\partial_\mu \chi$，则 $\partial_\mu A'^\mu = i\partial_\mu \partial^\mu \chi$。若非零 χ 恰好满足方程 $\partial_\mu \partial^\mu \chi = 0$，则 $A' \neq A$ 同样满足 Lorenz 规范。

3.3 在规范冗余度的启发下“逆天改命”

在量子场论的框架下，拉氏量决定运动方程，决定平面波解，决定正则对易关系，我们通过修改拉氏量的表达式，破坏规范冗余度，我们考虑加入规范固定项：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\nu)^2 \tag{21}$$

在 Lorenz 规范条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 下新的拉氏量退化成原来的拉氏量，同时我们选定 Feynman 规范：$\xi = 1$。

对新的拉氏量使用做小作用量原理，推导得到的欧拉-拉格朗日方程为：

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = 0 \tag{22}$$

这与从运动方程18出发，加洛伦兹规范条件等价：

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tag{23}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{24}$$

通过平面波展开求解：

$$A_\mu = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{1}{2E_{\vec{k}}}\sum_{\sigma=0}^{3} e_\mu(\vec{k},\sigma) \left(a_{\vec{k},\sigma}e^{-ik\cdot x} + a^\dagger_{\vec{k},\sigma}e^{ik\cdot x}\right) \tag{25}$$

其中，$e_\mu(\vec{k},\sigma)$ 为极化矢量，$a_{\vec{k},\sigma}$ 和 $a^\dagger_{\vec{k},\sigma}$ 分别为产生算符和湮灭算符。

在平面波解的语境下，运动方程，Lorenz 规范可以写成：

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = 0 \Rightarrow k\cdot k = 0 \tag{26}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow k\cdot e(\vec{k},\sigma) = 0 \tag{27}$$

此时我们还需要考虑剩余规范的固定，$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$，其中，剩余规范 χ 满足 $\partial_\mu \partial^\mu \chi = 0$，则 $\chi = e^{-ik\cdot x}$，故剩余规范变换等价于：

$$e(k,\sigma)_\mu \to e(k,\sigma)_\mu - ik_\mu$$

故对于剩余规范的固定操作就是移除 k_{mu} 部分

在通晓了上述规范冗余度去除的限制与程序之后，我们为平面波解25选定了如下的一组合适的基底：

$$e(\vec{k},0)^\mu = (1,0,0,0)^T \tag{28}$$

$$e(\vec{k},3)^\mu = (0,0,0,1)^T \tag{29}$$

$$e(\vec{k},1)^\mu = (0,1,0,0)^T \tag{30}$$

$$e(\vec{k},2)^\mu = (0,0,1,0)^T \tag{31}$$

这里三维动量 k 指向 x^3 方向，从而 $k^\mu = (|k|,0,0,|k|)$。我们可以看到，这样的矢量选择满足正交归一关系以及完备性关系，参考 [3]。另外我们发现，这四个矢量中可以满足26限制的只有后两个，幸运的是，若选定后两个作为极化矢量，明显不含有 k_{mu} 部分，相当于去掉了剩余规范冗余度

最后我们从物理的角度审视一番，这四个极化矢量中 $e(\vec{k},0)$ 是类时矢量，称为类时极化矢量。$e(\vec{k},3)$ 的空间部分指向 $\vec{k}$ 的方向，称为纵向极化矢量。余下 $i=1,2$ 对应的是横向极化矢量。我们知道无质量矢量场可以用来描述光子，光子在传播方向具有横向偏振，说明我们的选定与物理相吻合

3.4 尾声-Gupta-Bleuler 条件 *

到这里，我们发现一切都是美好的，然而，在通过上述拉氏量选定后，A_0 重新变成了动力学量，可以定义其共轭动量，这时的非零等时对易关系将于 Lorenz 规范相矛盾，解决方案是：选择弱化版本的 Gupta-Bleuler 条件，这里仅做说明，更详细的论证请参考 [2]

Four minus two equals two

——the gauge redundancy in quantum field theory

Wang Yuchen†

School of physics, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract

In this study, we first explore the well-known gauge redundancy problem starting from the A-B effect. Then, we introduce the gauge fixing method in classical electrodynamics. The beauty of physics lies in the fact that this gauge fixing idea can guide us to solve two problems in the quantization process of massless vector fields. Ultimately, the truth that ***observable physical quantities do not change with gauge transformation*** is unshakable, whether in classical or quantum mechanics.

关键词： gauge redundancy, vector field, quantization, Gupta-Bleuler condition

参考文献

[1] Shuo-Hong Guo. *Electric Dynamics*. Higher Education Press, Beijing, 2015.

[2] Yiwen Pan. Quantum field theory course homepage, 2023. URL: https://www.wolai.com/r7au4AmiJVetgQ245pApFN.

[3] Zhaohuan Yu. Quantum field theory lecture notes. Unpublished, 4 2023. URL: https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html.

[4] 郭硕鸿. 电动力学. 高等教育出版社, 北京, 2002.