动力学平均场理论

- 院系：物理学院
- 专业：物理专业
- 答辩人：王誉晨

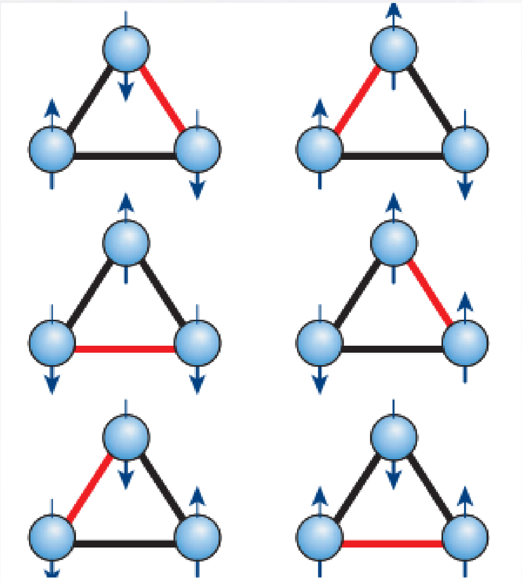
1 从蝴蝶效应讲起

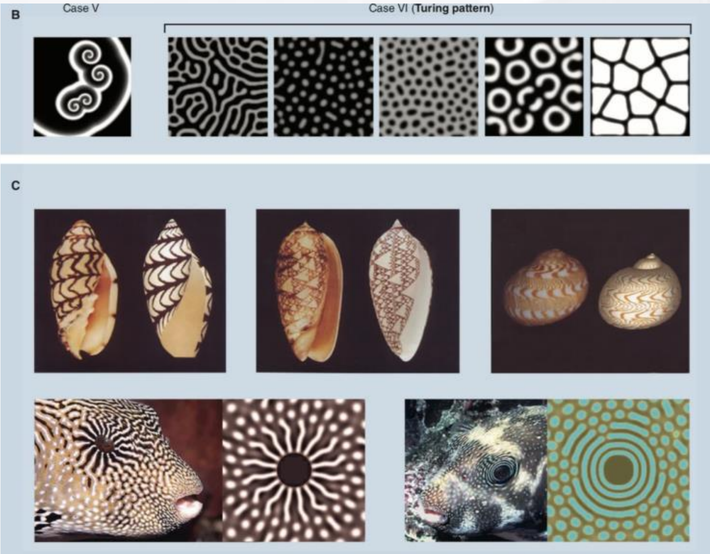
RESEARCH BACKGROUNDS

- **Quantum spin liquids**

- **self organised criticality**

- **K-line**





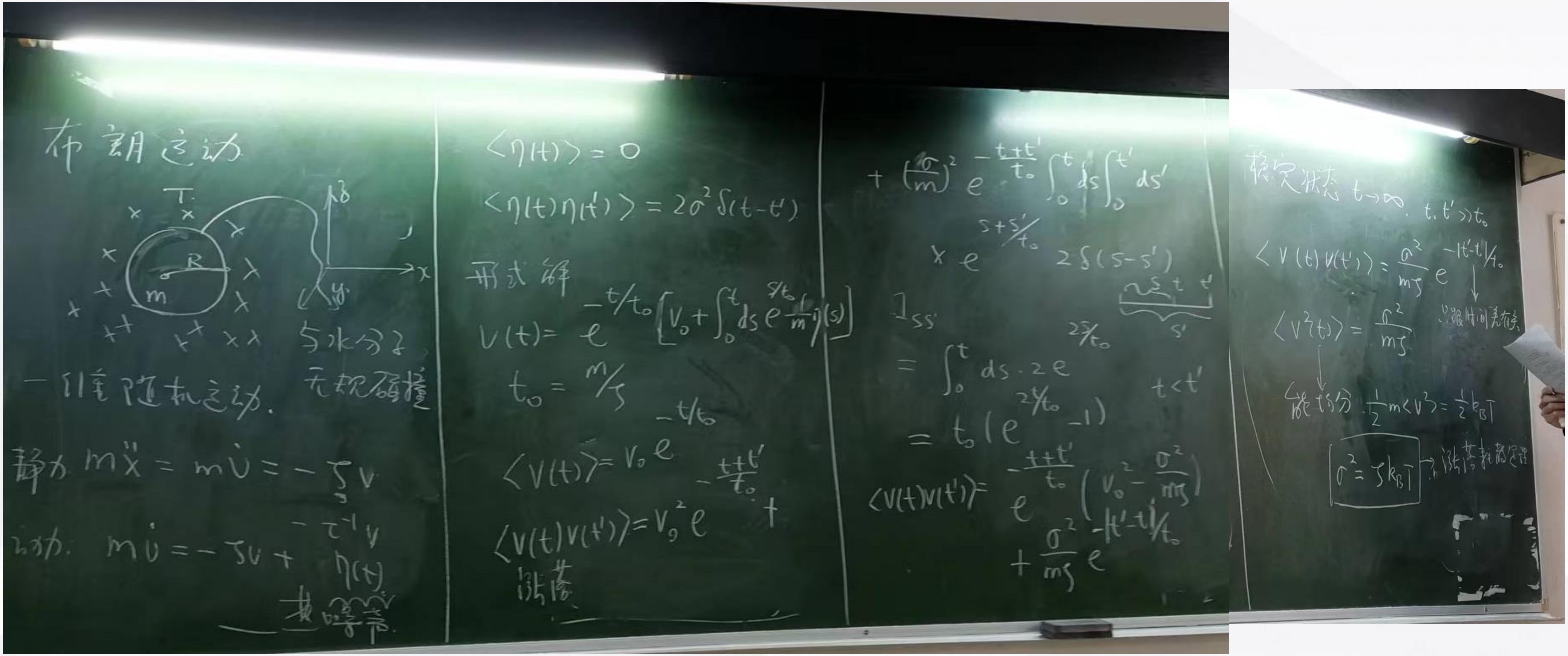
The more is different

无穷大的微分方程组

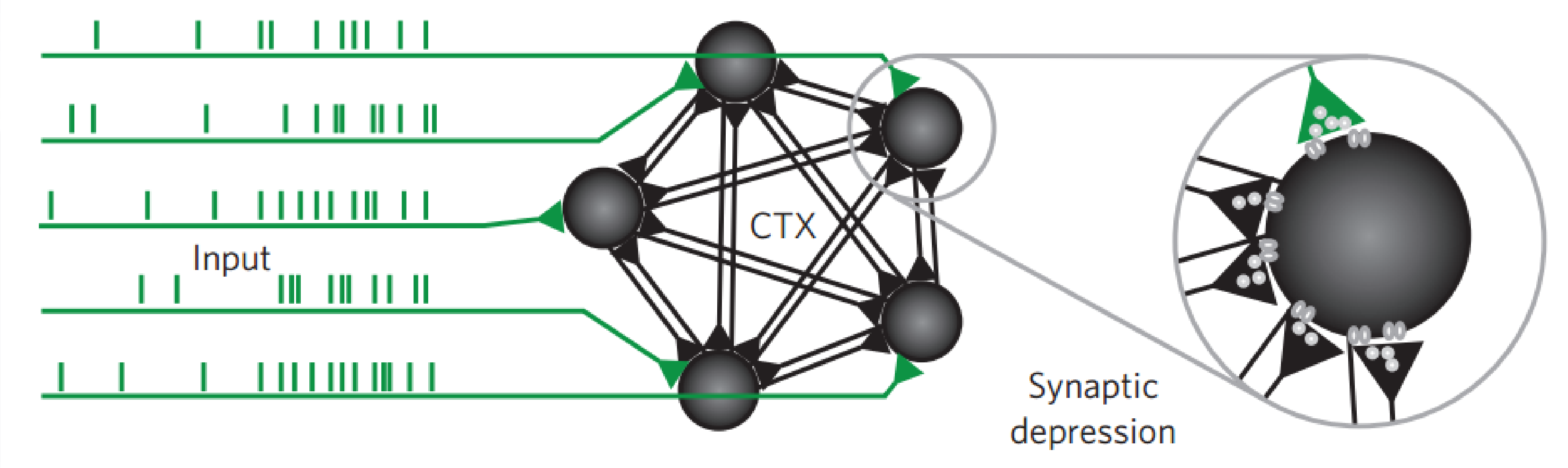
↓

高斯变量驱动的系统的变化

布朗运动


布朗运动
与水分子
无规碰撞
一维随机运动
静力 $m\ddot{x} = m\dot{v} = -\zeta v$
动力 $m\dot{v} = -\zeta v + \eta(t)$
噪声
$\langle \eta(t) \rangle = 0$
$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t-t')$
形式解
$v(t) = e^{-t/t_0}\left[v_0 + \int_0^t ds\, e^{s/t_0} \frac{1}{m}\eta(s)\right]$
$t_0 = m/\zeta$
$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-t/t_0}$
$\langle v(t)v(t') \rangle = v_0^2 e^{-\frac{t+t'}{t_0}} +$
$+ \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2 e^{-\frac{t+t'}{t_0}} \int_0^t ds \int_0^{t'} ds'$
$\times e^{\frac{s+s'}{t_0}} 2\delta(s-s')$
$I_{ss'}$
$= \int_0^t ds \cdot 2e^{2s/t_0}$
$t<t'$
$= t_0\left(e^{2t/t_0} - 1\right)$
$\langle v(t)v(t') \rangle = e^{-\frac{t+t'}{t_0}}\left(v_0^2 - \frac{\sigma^2}{m\zeta}\right) + \frac{\sigma^2}{m\zeta} e^{-|t'-t|/t_0}$
稳定状态 $t\to\infty$, $t, t' \gg t_0$
$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{\sigma^2}{m\zeta} e^{-|t'-t|/t_0}$
只跟时间差有关
$\langle v^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{m\zeta}$
能均分 $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$
$\boxed{\sigma^2 = \zeta k_B T}$

神经科学



$$\frac{dV_i(t)}{dt} = -\cancel{\frac{V_i(t) - V_{\text{rest}}}{\tau_m}} + \sum_{j,n} J_{ij}\delta\left(t - \cancel{t_{jn}} - \cancel{\Delta_{ij}}\right) + J_{\text{ext}} \cancel{\sum_n} \delta(t - \tilde{t}_{in})$$

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \eta_i$$

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{N} J_{ij}\phi\left(x_j\right)$$

2

痛并快乐着

RESEARCH BACKGROUNDS

动力学平均场理论

模型设定

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \boxed{\sum_{j=1}^{N} J_{ij}\,\phi(x_j)}$$

↓ neural state　　↓ weight　　→ non liner

$$J_i \sim N\left(0, \frac{g^2}{N}\right)$$

$$\langle \eta_i(t) \rangle = \sum_{j=1}^{N} [J_{ij}\,\phi(x_j)]_J$$

$$\langle \eta_i(t)\,\eta_j(t+\tau) \rangle = \left[\sum_{l=1}^{N} J_{il}\,\phi(x_l(t)) \sum_{k=1}^{N} J_{jk}\,\phi(x_k(t+\tau))\right]$$

$$= \left[\sum_{l=1}^{N} J_{il} \sum_{k=1}^{N} J_{jk}\,\phi(x_l(t))\,\phi(x_k(t+\tau))\right]$$

$$= \delta_{ij}\,\frac{g^2}{N} \sum_{k} \left[\phi(x_k(t))\,\phi(x_k(t+\tau))\right]$$

$$= \delta_{ij}\, g^2 \left\langle \phi(x_k(t))\,\phi(x_k(t+\tau)) \right\rangle$$

令: $C(\tau) = \left\langle \phi(x_k(t))\,\phi(x_k(t+\tau)) \right\rangle$

噪声平均

动力学平均场理论

模型设定

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \boxed{\sum_{j=1}^{N} J_{ij}\,\phi(x_j)}$$

neural state　　weight　　non liner

$$J_i \sim N\left(0, \frac{g^2}{N}\right)$$

$$\langle \eta_i(t) \rangle = \sum_{j=1}^{N} [J_{ij}\,\phi(x_j)]_J$$

$$\dot{x}_i = -x_i + \eta_i$$

$$\begin{cases} (1+i\omega)\,\hat{x}_i(\omega) = \hat{\eta}_i(\omega) \\ (1-i\omega)\,\hat{x}_i(-\omega) = \hat{\eta}_i(-\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1-\omega^2)\,\hat{x}_i(-\omega)\,\hat{x}_i(\omega) = \hat{\eta}_i(-\omega)\,\hat{\eta}_i(\omega)$$

动力学平均场理论

$$\Rightarrow \quad (1-w^2)\,\hat{x}_i(-w)\,\hat{x}_i(w) = \hat{\eta}_i(-w)\,\hat{\eta}_i(w)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \hat{\eta}(w)\,\hat{\eta}(-w)\,e^{-iw\tau}\,dw = \frac{1}{2\pi}\iint \eta(t)e^{-iwt}\,dt \int \eta(t')e^{iwt'}\,dt' \cdot e^{-iw\tau}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iiint \eta(t)\,\eta(t')\,e^{iw(-t+t'-\tau)}\,dt\,dt'\,dw$$

$$= \iint \eta(t)\eta(t')\,\delta(t'-(t+\tau))\,dt\,dt'$$

$$= \int \eta(t)\,\eta(t+\tau)\,dt$$

$$= \langle \eta(t)\,\eta(t+\tau)\rangle$$

同理:

$$\frac{1}{2\pi}\int \hat{x}(w)\,\hat{x}(-w)\,e^{-iw\tau}\,dw = \langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle$$

右边 $\quad \frac{1}{2\pi}\int \hat{\eta}(w)\,\hat{\eta}(-w)\,e^{-iw\tau}\,dw = \langle \eta(t)\,\eta(t+\tau)\rangle$

左边 $\quad \frac{1}{2\pi}\int \hat{x}(w)\,\hat{x}(-w)\,e^{-iw\tau}\,dw = \langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle$

$$\frac{1}{2\pi}\int (1+w^2)\,\hat{x}(w)\,\hat{x}(-w)\,e^{-iw\tau}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int (1-(iw)^2)\,\hat{x}(w)\,\hat{x}(-w)\,e^{-iw\tau}\,dw$$

$$= \left(1-\frac{d^2}{dt^2}\right)\langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle$$

令: $C(\tau) = \langle \phi(x_k(t))\,\phi(x_k(t+\tau))\rangle = \langle \eta(t)\,\eta(t+\tau)\rangle$

噪声平均

令: $\Delta(\tau) = \langle x(t)\,x(t+\tau)\rangle$

局域场平均

$$\Rightarrow \quad \Delta - \ddot{\Delta} = g^2\,C(\tau)$$

动力学平均场理论

$$\Rightarrow \quad \Delta - \ddot{\Delta} = g^2 C(\tau)$$

$$\ddot{\Delta} = -\frac{\partial V}{\partial \Delta}.$$

参数化：

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(t+\tau)\rangle = 0$$

$$\langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle = \Delta(\tau)$$

$$x(t) = \alpha y + \beta z$$

$$x(t+\tau) = \alpha y' + \beta z$$

y. y'. z 都是高斯变量

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\Delta(0) - |\Delta(\tau)|}$$

$$\beta = \sqrt{|\Delta \tau|}$$

动力学平均场理论

$$\Rightarrow \quad \Delta - \ddot{\Delta} = g^2 C(\tau)$$

$$\ddot{\Delta} = -\frac{\partial V}{\partial \Delta}.$$

$$C(\tau) = \int DyDy'Dz\phi(\alpha y + \beta z)\phi\left(\alpha y' + \beta z\right) = \int Dz\left[\int Dy\phi(\alpha y + \beta z)\right]^2$$

$$V = -\frac{\Delta^2}{2} + g^2 V_2$$

$$V_2 = \int Dz\left[\int Dy\Phi(\alpha y + \beta z)\right]^2$$

$$V(\Delta) = -\frac{\Delta^2}{2} + g^2 \int Dz\left[\int Dy\Phi(\sqrt{\Delta(0) - |\Delta|}y + \sqrt{|\Delta|}z)\right]^2$$

动力学平均场理论

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \boxed{\sum_{j=1}^{N} J_{ij}\,\phi(x_j)}$$

neural state　　weight　　nonliner

$$J_i \sim N\left(0, \frac{g^2}{N}\right)$$

$$\ddot{\Delta} = -\frac{\partial V}{\partial \Delta}.$$

$$V(\Delta) = -\frac{\Delta^2}{2} + g^2 \int Dz \left[\int Dy\,\Phi\left(\sqrt{\Delta(0) - |\Delta|}\,y + \sqrt{|\Delta|}\,z\right)\right]^2$$

令: $\Delta(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau)\rangle$

局域场平均

$$\Delta(0) \geq |\Delta(t)|$$

$$\Delta(t) = \Delta(-t)$$

$$\dot{\Delta}(0) = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{\Delta}(t)^2 + V(\Delta(t)) = V(\Delta(0))$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Delta} = -\Delta + g^2 \int Dz \left[\int Dy\,\phi\left(\sqrt{\Delta(0) - |\Delta|}\,y + \sqrt{|\Delta|}\,z\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Delta^2} = -1 + g^2 \int Dz \left[\int Dy\,\phi'\left(\sqrt{\Delta(0) - |\Delta|}\,y + \sqrt{|\Delta|}\,z\right)\right]^2$$

动力学平均场理论

令： $\Delta(\tau) = \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle$

局域场平均

$$\Delta(0) \geq |\Delta(t)|$$

$$\Delta(t) = \Delta(-t)$$

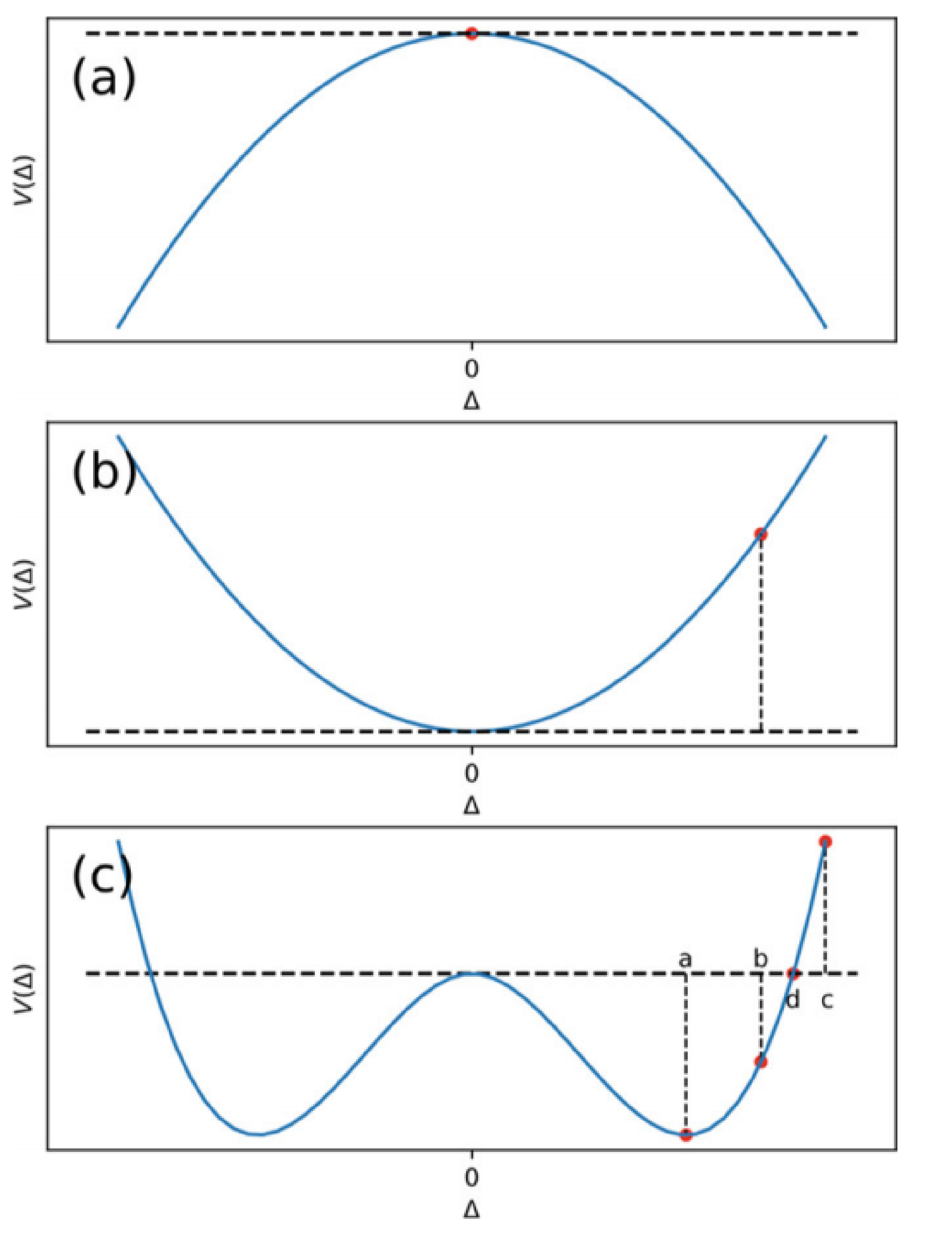
$$\dot{\Delta}(0) = 0$$

$$\frac{1}{2}\dot{\Delta}(t)^2 + V(\Delta(t)) = V(\Delta(0))$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Delta} = -\Delta + g^2 \int Dz \left[\int Dy\, \phi\left(\sqrt{\Delta(0) - |\Delta|}\, y + \sqrt{|\Delta|}\, z\right) \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Delta^2} = -1 + g^2 \int Dz \left[\int Dy\, \phi'\left(\sqrt{\Delta(0) - |\Delta|}\, y + \sqrt{|\Delta|}\, z\right) \right]^2$$

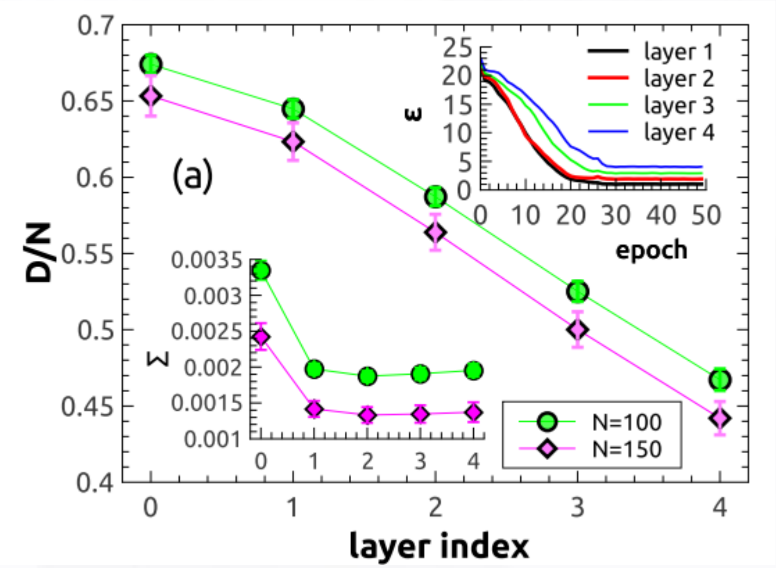
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \Delta^2}\Big|_{\Delta=0} = -1 + g^2 \left[\int Dy\, \phi'\left(\sqrt{\Delta(0)}\, y\right) \right]^2$$

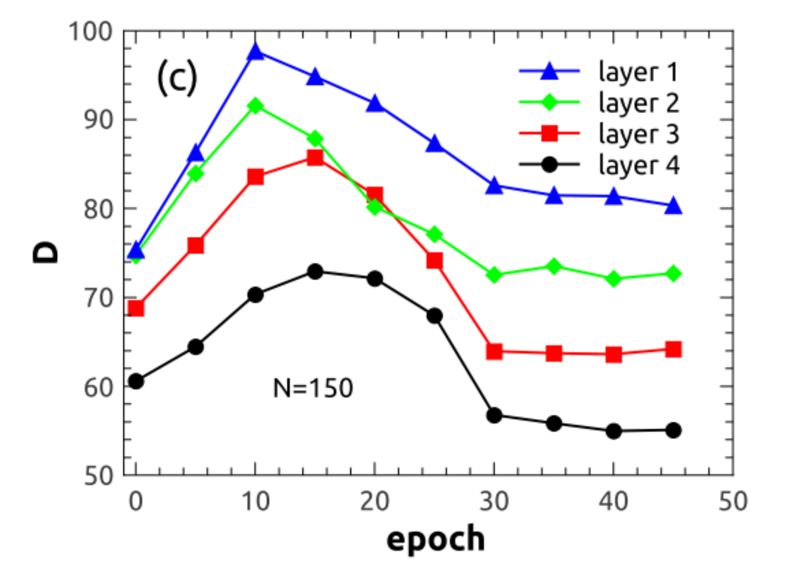


3 前世今生

RESEARCH BACKGROUNDS

降维之谜





PHYSICAL REVIEW E **98**, 062313 (2018)

Mechanisms of dimensionality reduction and decorrelation in deep neural networks

Haiping Huang*
School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, People's Republic of China

凝聚态

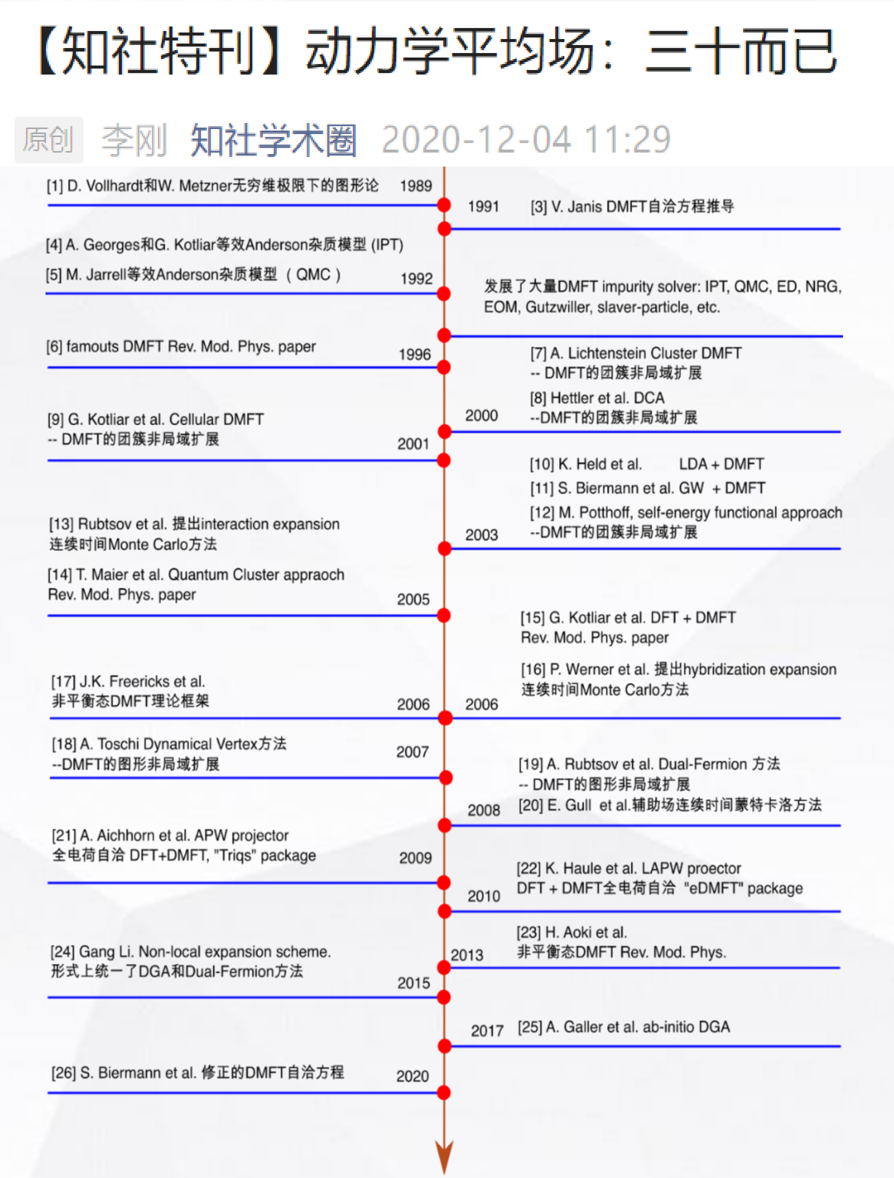
主要解决强关联问题

1.电子结构计算
DMFT在电子结构计算中得到广泛应用，可以处理包括强关联体系在内的各种体系的电子结构。例如，DMFT可以用来计算在高温超导材料中电子的输运性质、激发谱和相变等。
2.量子磁性材料
DMFT在描述量子磁性材料的磁性和输运性质方面也有广泛应用。例如，可以用DMFT研究铁磁、反铁磁、铁电材料的磁性和输运性质，以及这些性质的相互关系。
3.自旋液体
DMFT也可以用来描述自旋液体（spin liquid）等复杂的凝聚态体系。自旋液体是一种特殊的量子态，在其中自旋无序的基态呈现出一些非常特殊的物理性质。通过DMFT的研究，可以探索自旋液体的电子、磁性和输运性质。

相较于蒙特卡洛方法，DMFT的优势在于：

1.计算速度较快
蒙特卡洛方法的计算速度通常比DMFT慢得多，因为蒙特卡洛方法需要对随机采样进行大量的计算，而DMFT则是通过对局部格林函数的求解来实现对整个系统的描述，相对来说计算速度较快。
2.适用范围更广
蒙特卡洛方法通常只适用于格点模型等特定类型的问题，而DMFT可以处理更广泛的强关联问题，包括实际材料中的电子结构和磁性等问题。
3.非平衡性问题处理能力强
DMFT可以处理非平衡态系统的时间演化问题，例如可以研究强关联电子体系在外场作用下的输运性质和响应，而蒙特卡洛方法通常只适用于平衡态系统。

不过，DMFT也有一些不足之处，例如：
1.局限于单粒子近似
DMFT通常只考虑单粒子格林函数的效应，而忽略多粒子效应的影响，因此它在处理某些问题时可能不太准确。
2.忽略空间相关性
DMFT将系统划分为局部和非局部两部分，将空间相关性简化为局部的平均场效应，而忽略了空间相关性对系统的影响，因此在处理某些问题时可能存在一定的局限性。



THANKS

感谢垂听